**Gewone differentiaalvergelijkingen**
Cursus 2002-2003.
Tentamen, 19 maart 2003, duur: 3 uur.

Licht je antwoorden bondig toe; geef bijvoorbeeld aan welke oplossingsmethode of welke stelling je gebruikt.

1.[1] (a)[5] Toon aan dat de substitutie $v = \ln y$ de differentiaalvergelijking $y' + P(x)y\ln y + Q(x)y = 0$ omzet in een lineaire differentiaalvergelijking. Los hiermee op: $xy' + 2y\ln y - 4x^2y = 0$, $y(1) = 1$.
(b)[4] Toon aan dat $(7x^3+3x^2y+4y)dx+(4x^3+x+5y)dy = 0$ niet exact is, maar na vermenigvuldiging met een functie van de vorm $\varphi(x+y)$ wel. Los vervolgens de differentiaalvergelijking op. (Aanwijzing: $4x^3+x+5y = 4x^3-4x+5(x+y)$.)

2.[1](a)[4] Toon aan dat voor elke $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ er precies één oplossing is van het beginwaardeprobleem: $y' = \sqrt{x^2+y^2}$, $y(x_0) = y_0$, en dat deze oplossing gedefinieerd is op het hele interval $(-\infty, \infty)$. Welke stelling pas je toe?
(b)[5] Los op met behulp van de Picard iteratiemethode: $y' = 2y + 2$, $y(0) = 0$.

3.[1] (a)[6] Teken het faseportret, inclusief de doorlooprichting, van het autonome systeem $x' = 2y$, $y' = -xe^{-x}$. Bespreek de stabiliteit van het stationaire punt. (Aanwijzing: Bepaal de differentiaalvergelijking voor $y$ als functie van $x$ en los die op.)
(b)[3] Bepaal alle oplossingen van $y''' - y'' + y' - y = 4\sin x$.

4.[1](i)[4] Leid een formule af voor de algemene oplossing van het systeem van $n$ eerste orde differentiaalvergelijkingen $y' = A(x)y + b(x)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ in termen van een fundamentaal matrix $Y(x)$.
(ii)[5] Bepaal een fundamentaal matrix $Y(x)$ van $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y$. Laat zien dat je antwoord klopt.

5.[1] Beschouw de differentiaaluitdrukking $Ly = x^2y'' + 2xy' - 2y$. Definieer

$$\mathcal{L} : \{y \in C^2[1,2] \,|\, 2y(1) + y'(1) = 0,\ y(2) - y'(2) = 0\} \to C[1,2]$$

door $\mathcal{L}y = Ly$.
(i)[2] Toon aan dat $\mathcal{L}$ inverteerbaar is. Welke stelling pas je toe? (Aanwijzing: Bepaal oplossingen van de homogene vergelijking van de vorm $x^\lambda$.)
(ii)[2] Bepaal de inverse van $\mathcal{L}$.
(iii)[3] Bepaal de oplossing $y$ van $Ly(x) = x$ die voldoet aan

$$2y(1) + y'(1) = 1, \quad y(2) - y'(2) = 1.$$

(iv)[2] Bewijs dat als $\mathcal{L}y = \lambda y$ en $y \not\equiv 0$, dan is $\lambda$ een reëel getal.